T.D. 4 : Optique

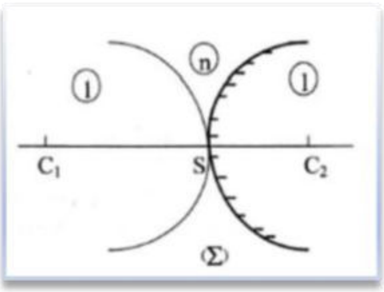
Exercice 1 : (D.S.1 2017-2018)

Soit un système catadioptrique constitué par une lentille mince divergente ***L***, de centre optique O, de distance focale $f=10cm$, et un miroir concave ***M*** de centre C confondu avec le foyer image F' de la lentille et de sommet S confondu avec le foyer objet F de L. Un objet AB de longueur $1cm$ linéaire droit perpendiculaire à l'axe est situé à $\overline{OA} = -15cm$.

1- Construire l'image $A'B'$ de l'objet AB, quelle est sa position
2- Quel est le grandissement linéaire du système ?
3- Préciser la nature de cette image
4- Déterminer le miroir équivalent

Exercice 2 : Etude d'un système catadioptrique (cc1 18-19)

On considère un système catadioptrique (Σ) d'indice n, plongé dans l'air constitué d'un dioptre sphérique (DS), de sommet S et de centre C_1, et d'un miroir sphérique (MS), de même sommet S et de centre C_2 (voir figure)



1- En supposant qu'à travers (Σ), un objet A peut avoir trois images A_0, A_1 et A' selon le trajet suivant :

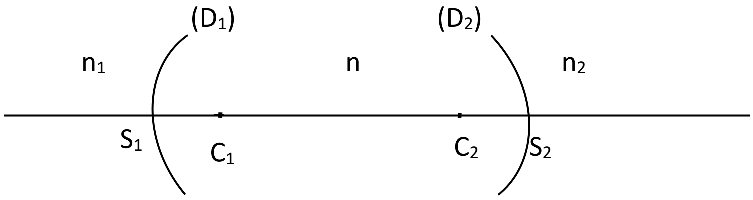
$$A \xrightarrow{DS} A_0 \xrightarrow{MS} A_1 \xrightarrow{DS} A'$$

Ecrivez la formule de conjugaison relative à chaque passage en considérant l'origine au sommet S

2- En déduire la formule de conjugaison du système (Σ) reliant les points conjugués A et A'
3- Montrer que le système (Σ) est équivalent à un miroir sphérique de sommet S et de centre C dont on déterminera le rayon de courbure $R = \overline{SC}$ en fonction de $R_1 = \overline{SC_1}$, $R_2 = \overline{SC_2}$ et n.
4- Quelle est la nature de ce miroir équivalent ?

Exercice 3 : rattrapage 17-18

Soient deux dioptres sphériques D_1 et D_2 de sommets et centres respectifs S_1, C_1, et S_2 , C_2



1- Pour chacun de ces dioptres, calculer les distances focales objet et image

On donne : $n_1 = n_2 = 1$; $n = \frac{3}{2}$; $\overline{S_1C_1} = 60cm$; $\overline{S_2C_2} = -30cm$

2- on associe ces deux dioptres tel que $\overline{S_1S_2} = e = 20cm$

a- déterminer la position de l'image M' de F'_1 (foyer image de D_1) à travers D_2.

b- déterminer la position de l'objet M ayant son image confondue avec F_2 (foyer objet de D_2) à travers D_1

3- on fait tendre e vers 0, c'est-à-dire S_1 et S_2 confondus en un point S. soit A_2B_2 l'image d'un objet A_1B_1 à travers les 2 dioptres. On appellera AB l'image intermédiaire.

a- donner la relation permettant de calculer la position de A_2B_2 connaissant celle de A_1B_1

b- en déduire les distances focales objet et image de la lentille mince ainsi obtenue

Exercice 4 : CC1 (12-13)

Soit un miroir sphérique concave de sommet S, de centre C, de rayon R, plongé dans l'air. Un rayon lumineux paraxial AI (A appartient à l'axe optique) se réfléchit en I sur le miroir et coupe l'axe au point A'. Soit H la projection de I sur l'axe optique, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ vecteurs unitaires.

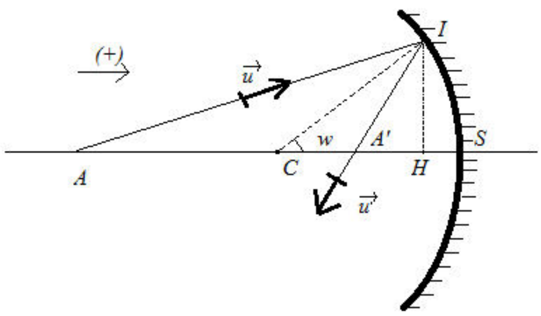
On pose $\overline{CA} = p$; $\overline{CA'} = p'$; $\overline{CS} = R$; $\widehat{SCI} = w$ (très petit)

1- Exprimer le chemin optique $L = (AA')$ en fonction de p, p', R et w

2- En appliquant la condition générale de stigmatisme approché, établir la relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au centre

3- Application : Décrire l'image que donne un miroir sphérique concave (rayon de courbure = 60 cm) d'un objet de 3cm de hauteur placé perpendiculairement à l'axe optique et situé à 20 cm du sommet du miroir.

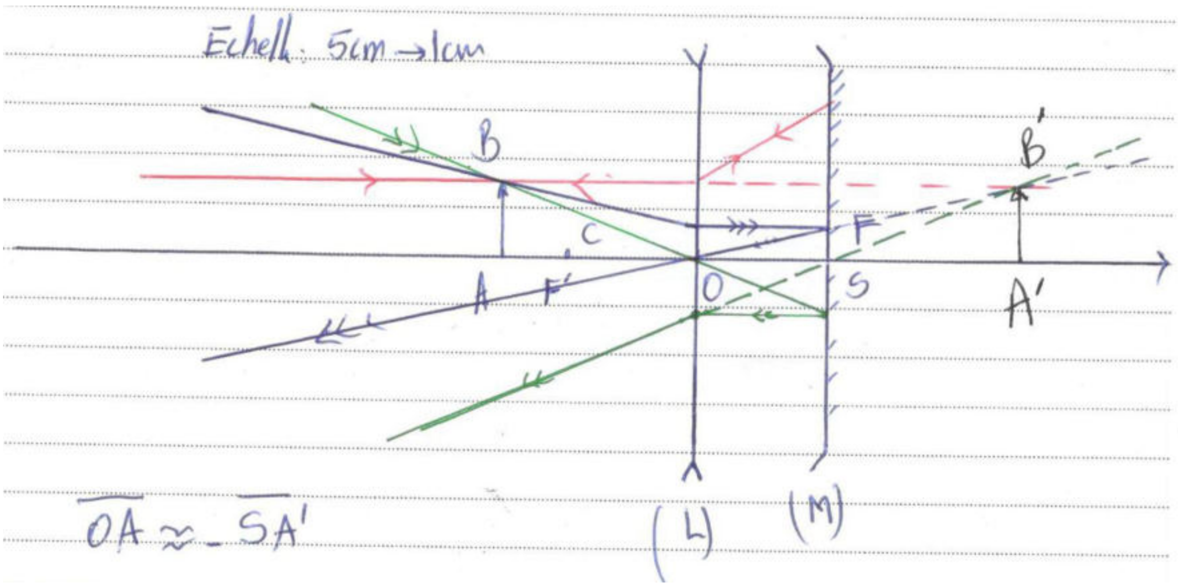
Faire une construction géométrique.



Correction T.D. 4 : Optique

Exercice 1

1. La construction géométrique :



L'image *A'B'* est symétrique de *AB* par rapport au milieu du segment *OS* :

$$\overline{SA'} = -\overline{OA}$$

2. Grandissement linéaire :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1$$

3. La nature de cette image : virtuelle est droite
4. Miroir équivalent :

- Le sommet Σ du miroir équivalent est l'image de *S* à travers *L*. le point *S* jouant le rôle d'objet réel pour *L*, on doit prendre comme sens positif de la lumière le sens qui va de la droite vers la gauche. Ainsi :

$$\frac{1}{\overline{OS}} - \frac{1}{\overline{O\Sigma}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \Rightarrow \quad \overline{O\Sigma} = -\frac{\overline{OF'}}{2} \text{ ; } \Sigma \text{ est le milieu de } \overline{OS}.$$

- Le centre Ω du miroir équivalent est l'image *C* à travers *L*. le point *C* joue le rôle d'objet virtuel pour *L*. ainsi :

$$\frac{1}{\overline{OC}} - \frac{1}{\overline{O\Omega}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \Rightarrow \quad \overline{O\Omega} = \infty \text{ ; } \Omega \text{ est à l'infini.}$$

En tenant compte de la remarque relative à l'inversion du sens positif de la lumière, on a mis $\overline{OF}'$ et non pas $\overline{OF}$. En effet, dans la lentille le rôle des foyers est inversé si on inverse le sens de la lumière.

- Le miroir équivalent est plan, perpendiculaire à l'axe au milieu de OS, ce qui confirme les propriétés énoncées à la première question.

Exercice 2

1. Les relations de conjugaisons :

$$A \xrightarrow{DS} A_0 : \quad \boxed{\frac{1}{\overline{SA}} - \frac{n}{\overline{SA_0}} = \frac{1-n}{\overline{SC_1}}} \qquad (1)$$

$$A_0 \xrightarrow{MS} A_1 : \quad \boxed{\frac{1}{\overline{SA_0}} + \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{2}{\overline{SC_2}}} \qquad (2)$$

$$A_1 \xrightarrow{DS} A' : \quad \boxed{\frac{n}{\overline{SA_1}} - \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{n-1}{\overline{SC_1}}} \qquad (3)$$

2. $(1)+(n\times(2))-(3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2(1-n)}{\overline{SC_1}} + \frac{2n}{\overline{SC_2}}}$

3. La formule de conjugaison du système (Σ) est équivalente à celle d'un miroir sphérique de sommet S et de centre C et de rayon $R = \overline{SC}$ tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\overline{SA}} + \dfrac{1}{\overline{SA'}} = \dfrac{2}{\overline{SC}} \\ \dfrac{1}{\overline{SA}} + \dfrac{1}{\overline{SA'}} = \dfrac{2(1-n)}{\overline{SC_1}} + \dfrac{2n}{\overline{SC_2}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{2(1-n)}{\overline{SC_1}} + \frac{2n}{\overline{SC_2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{1-n}{R_1} + \frac{2n}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{R_1 R_2}{nR_1 + (1-n)R_2}}$$

4. $R_1 < 0$; $R_2 > 0$ et $n > 1 \quad \Rightarrow \quad R > 0$

$\Rightarrow$ Le miroir équivalent est convexe.

Exercice 3

1.

- Dioptre (D1) :

En considérant un point Objet A_1 et son image A à travers le 1[er] dioptre, la formule de conjugaison (conditions de Gauss) :

$$\boxed{\frac{n_1}{\overline{S_1A_1}} - \frac{n}{\overline{S_1A}} = \frac{n_1 - n}{\overline{S_1C_1}}} \qquad (1)$$

- Foyer Objet F_1 : $A \to \infty$; $A_1 \equiv F_1$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_1}{\overline{S_1F_1}} = \frac{n_1 - n}{\overline{S_1C_1}} \Rightarrow \boxed{\overline{S_1F_1} = \frac{n_1}{n_1 - n}\overline{S_1C_1}} \qquad (2)$$

- Foyer Image F'_1 : $A_1 \to \infty$; $A \equiv F_1'$

$$\Rightarrow \quad -\frac{n}{\overline{S_1F'_1}} = \frac{n_1 - n}{\overline{S_1C_1}} \Rightarrow \boxed{\overline{S_1F'_1} = \frac{n}{n - n_1}\overline{S_1C_1}} \qquad (3)$$

A.N. : $\begin{cases} \overline{S_1F_1} = -120cm \\ \overline{S_1F_1'} = 180cm \end{cases}$

- Dioptre (D2) :

En considérant un point Objet A et son image A_2 à travers le 2[e] dioptre, la formule de conjugaison (conditions de Gauss) :

$$\boxed{\frac{n}{\overline{S_2A}} - \frac{n_2}{\overline{S_2A_2}} = \frac{n - n_1}{\overline{S_2C_2}}} \qquad (4)$$

De la même manière on obtient pour D_2 :

$$\boxed{\begin{cases} \overline{S_2F_2} = \dfrac{n}{n - n_2}\overline{S_2C_2} & (5) \\ \overline{S_2F'_2} = \dfrac{n_2}{n_2 - n}\overline{S_2C_2} & (6) \end{cases}} \qquad \text{A.N. :} \quad \begin{cases} \overline{S_2F_2} = -90cm \\ \overline{S_2F_2'} = 60cm \end{cases}$$

2. a- image de F_1' à travers (D_2) :

- Relation de conjugaison relative a (D_2) avec $A \equiv F'_1$ et $A_2 \equiv M_2$:

$$\frac{n}{\overline{SF_1'}} - \frac{n_2}{\overline{S_2M_2}} = \frac{n - n_2}{\overline{S_2C_2}} \qquad (7)$$

Or : $\overline{S_2F_1'} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F'_1} = \overline{S_1F'_1} - e$

Et d'après l'équation (3) :

$$\overline{S_1F'_1} = \frac{n}{n - n_1}\overline{S_1C_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{S_2F'_1} = \frac{n}{n - n_1}\overline{S_1C_1} - e$$

$$(7) \quad \Rightarrow \quad \overline{S_2M_2} = \frac{n_2\overline{S_2C_2}(n\overline{S_1C_1} + e(n_1 - n))}{n(n - n_1)\overline{S_2C_2} + (n_2 - n)\left[n\overline{S_1C_1} + (n_1 - n)e\right]}$$

A.N. : $\overline{S_2M_2} = 38.4cm$

b- M Objet et F_2 son image à travers (D_1).

Relation de conjugaison (1) avec $A_1 \equiv M$ et $A \equiv F_2$

$$\frac{n_1}{\overline{S_1M}} - \frac{n}{\overline{S_1F_2}} = \frac{n_1 - n}{\overline{S_1C_1}} \qquad (8)$$

Avec : $\overline{S_1F_2} = \overline{S_1S_2} + \overline{S_2F_2} = e + \frac{n}{n-n_2}\overline{S_2C_2}$ d'après (5)

$$\Rightarrow \qquad \overline{S_1M} = \frac{n_1\overline{S_1C_1}(n\overline{S_2C_2} + e(n-n_2))}{n(n-n_2)\overline{S_1C_1} + (n_1 - n)\left[n\overline{S_2C_2} + (n-n_2)e\right]}$$

A.N. : $\overline{S_1M} = -33.6cm$

3. $e \to 0$; $S_1 \equiv S_2 \equiv S$

$$\begin{cases} \overline{SM_2} = \dfrac{n_2.\overline{SC_1}.\overline{SC_2}}{(n-n_1)\overline{SC_2} + (n_2 - n)\overline{SC_1}} \\ \overline{SM} = \dfrac{n_1.\overline{SC_1}.\overline{SC_2}}{(n-n_2)\overline{SC_1} + (n_1 - n)\overline{SC_2}} \end{cases}$$

Pour $n_1 = n_2 = 1$:

$$\begin{cases} \overline{SM_2} = \dfrac{\overline{SC_1}.\overline{SC_2}}{(n-1)(\overline{SC_2} - \overline{SC_1})} \\ \overline{SM} = \dfrac{\overline{SC_1}.\overline{SC_2}}{(n-1)(\overline{SC_1} - \overline{SC_2})} \end{cases}$$

a – à travers (D1), la position de AB est obtenue à partir de (1) ; la position de A2B2 à travers (D2) est donnée par (4) en supposant que $S_1 \equiv S_2 \equiv S$.

(1) +(4) : $$\frac{n_1}{\overline{SA_1}} - \frac{n_2}{\overline{SA_2}} = \frac{n_1 - n}{\overline{SC_1}} + \frac{n - n_1}{\overline{SC_2}} \qquad (9)$$

C'est la formule de conjugaison donnant A_2B_2 à partir de A_1B_1, pour $n_1=n_2=1$.

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} - \frac{1}{\overline{SA_1}} = (n-1)\left(\frac{1}{\overline{SC_1}} - \frac{1}{\overline{SC_2}}\right) \qquad (10)$$

C'est la formule de conjugaison d'une lentille mince d'indice n, plongée dans l'air.

b- distances focales :

- Distance focale objet : $A_2 \to \infty$; $A_1 \equiv F$

d'après (9) : $$\frac{n_1}{\overline{SF}} = \frac{n_1 - n}{\overline{SC_1}} + \frac{n - n_2}{\overline{SC_2}}$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{SF} = \frac{n_1\overline{SC_1}\,\overline{SC_2}}{(n_1 - n)\overline{SC_2} + (n - n_2)\overline{SC_1}}$$

- Distance focale image : $A_1 \to \infty$; $A_2 \equiv F'$

$$\overline{SF'} = \frac{n_2 \overline{SC_1}\,\overline{SC_2}}{(n-n_1)\overline{SC_2} + (n_2-n)\overline{SC_1}}$$

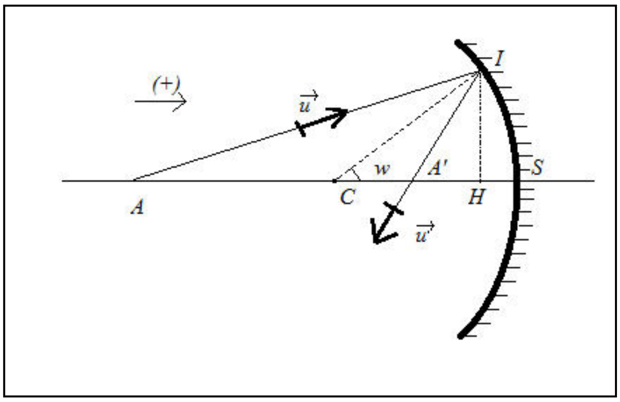
Remarque : en comparant aux résultats 3-a, on voit bien que $F \equiv M$ et $M_2 \equiv F'$ et pour $n_1 = n_2 = 1$

$$\overline{SF} = -\overline{SF'}\frac{\overline{SC_1}\,\overline{SC_2}}{(n-1)(\overline{SC_1} - \overline{SC_2})}$$

Exercice 4

1. Le chemin optique :

$$L = (AA') = n.\dot{u}.A\dot{I} + n.\dot{u}'.\overline{IA}' \qquad (n=1 \text{ pour l'air})$$
$$= AI + IA'$$



- Dans le triangle ICA' :

$$\overrightarrow{IA}'^2 = \overrightarrow{IC}^2 + \overrightarrow{CA}'^2 + 2\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{CA}'$$

Soit : $IA'^2 = R^2 + p'^2 - 2R.p'.\cos w$

- Dans le triangle IAC :

$$\overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{IC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{CA}$$

Soit : $IA'^2 = R^2 + p^2 - 2R.p.\cos w$

Donc :

$$L = (R^2 + p^2 - 2R.p.\cos w)^{\frac{1}{2}} + (R^2 + p'^2 - 2R.p'.\cos w)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (p-R)\left[1 + \frac{2Rp(1-\cos w)}{(p-R)^2}\right]^{\frac{1}{2}} + (p'-R)\left[1 + \frac{2Rp'(1-\cos w)}{(p'-R)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

2. Dans l'approximation de Gauss on peut réaliser le stigmatisme approché ; le chemin optique est alors constant au 4[e] ordre près.

$$w \text{ très faible} \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos w = \frac{w^2}{2}$$

L'expression de L devient :

$$\Rightarrow \qquad L \simeq (p-R)\left[1 + \frac{2Rp\dfrac{w^2}{2}}{2(p-R)^2}\right] + (p'-R)\left[1 + \frac{2Rp'\dfrac{w^2}{2}}{2(p'-R)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad L \simeq (p-R) + \frac{R}{2}\frac{p}{p-R}w^2 + (p'-R)\frac{R}{2}\frac{p'}{p'-R}w^2$$

Pour que L soit constant au *4[e]* ordre près il faut que : $\dfrac{p}{p-R} + \dfrac{p'}{p'-R} = 0$

Il vient : $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = \dfrac{2}{R}$ soit $\dfrac{1}{\overline{CA}} + \dfrac{1}{\overline{CA'}} = \dfrac{2}{\overline{CS}}$

On retrouve la relation de conjugaison pour un miroir sphérique avec origine au centre.

3. Application :

$$\frac{1}{p'} = \frac{2}{R} - \frac{1}{p} \qquad \Rightarrow \qquad p' = \frac{pR}{2p - R}$$

Le grandissement lineaire : $\gamma = \frac{p'}{p}$

A.N. : $R = \overline{CS} = 60cm$, $p = \overline{CA} = 40cm$.

$\Rightarrow \qquad p' = \overline{CA}' = 120cm \quad$ et $\gamma = 3$

Image virtuelle est droite plus grande que l'objet.